TWO EXAMPLES OF FATTENING FOR THE MEAN CURVATURE FLOW WITH A DRIVING FORCE

G. BELLETTINI†

Abstract. We construct two examples [4] of a Lipschitz function $u_0 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ whose level curves evolve in time, in the viscosity sense, according to the law

$$V(x,t) = \kappa(x,t) + g(t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad t \in [0,T],$$

with the property that there exists an initial level curve $\{u_0 = \lambda^\star\}$ of u_0 verifying

$$\begin{aligned} &u_0 \text{ is of class } C^\infty \text{ in a neighbourhood of } \{u_0 = \lambda^\star\}, \\ &\{u_0 = \lambda^\star\} \text{ is compact and } |\nabla_x u_0| > 0 \text{ on } \{u_0 = \lambda^\star\}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

which develops, after a positive finite time, a full two-dimensional interior part. The two examples are given with $g(t) = 1 - t$ and $g(t) \equiv 1$, respectively.

Given a continuous function u_0 which is constant outside of a suitable ball, for any $\lambda \in \mathbf{R}$ and any $t \in [0,T]$ we define

$$\mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda\}, g)(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : u(x,t) = \lambda\},$$
$$\mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : u(x,t) < \lambda\},$$

where u is the unique viscosity solution of

$$u_t - |\nabla u| \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + |\nabla u| g(t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{0.2}$$

The set $\mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda\}, g)(t)$ is then the generalized viscosity evolution of $\{u_0 = \lambda\}$ according to (0.2).

We prove the following results (see also [4]).

Let $g(t) = 1 - t$ for $t \in [0,1[$, or equivalently let $g(t) \equiv 1$. Then there exist a function $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, a real number $\lambda^\star$, a ball B centered at the origin and a time interval $[\alpha, \beta] \subseteq]0,1[$ such that $\{u_0 = \lambda^\star\}$ verifies (0.1) and

$$B \subseteq \mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda^\star\}, g)(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Precisely, if $g(t) = 1-$ then u_0 is of the form

$$u_0(x) = \min(\mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}(x, \mathbf{R}^2 \setminus E) + R^\star, 2R^\star),$$

with

$$E = B_{R^\star}(-R^\star, 0) \cup B_{R^\star}(R^\star, 0),$$

where $R^\star$ is a suitable positive real number, with $R^\star > \lambda^\star$.

If $g \equiv 1$ then u_0 is of the form

$$u_0(x) = \min(\mathrm{dist}(x, F) - \mathrm{dist}(x, \mathbf{R}^2 \setminus F), 1),$$

with

$$F = B_{R_{\overline{\mu}}(0)}(-R^\star, 0) \cup B_{R_{\overline{\lambda}}(0)}(r^\star, 0),$$

where $R_{\overline{\mu}}(0)$, $R_{\overline{\lambda}}(0)$, $R^\star$, $r^\star$ are suitable positive real numbers, with $R_{\overline{\mu}}(0) + R_{\overline{\lambda}}(0) < R^\star + r^\star$, and $r^\star < R^\star$.

†Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 40127 Bologna, Italy. email: bellettini@dm.unibo.it

DUE ESEMPI DI SINGOLARITÀ PER IL MOTO SECONDO LA CURVATURA CON TERMINE FORZANTE

G. BELLETTINI†

1. Introduzione. In questa nota si illustra un lavoro scritto in collaborazione con Paolini [4], nato in seguito ad alcune discussioni avute con De Giorgi. Illustreremo tale lavoro senza tutti i dettagli, ma cercando di commentare sufficientemente le idee della dimostrazione. Alla fine si considera brevemente qualche possibile modifica non apparsa in [4].

La nota si colloca nell'ambito del movimento delle superfici secondo la curvatura media, che è un argomento piuttosto studiato sia dal punto di vista della geometria che della analisi. Si tratta di descrivere quanto più possibile il comportamento di una ipersuperficie che si muova nel tempo secondo una legge che associa ad ogni punto una velocità diretta lungo la direzione normale e di modulo pari alla curvatura media nel punto (o una funzione della curvatura media). Una delle questioni che si pongono quando si affronta questo problema è l'eventuale formazione di singolarità. Per esempio, si pensi a un insieme a forma di osso di cane in $\mathbf{R}^3$ avente la parte centrale molto sottile: può capitare che durante l'evoluzione le due "facce opposte" della frontiera di tale parte dell'insieme vadano a toccarsi in un punto: si può immaginare che possano avvenire dei cambi di topologia. Che senso bisogna dunque dare al movimento in questi casi? Che cosa si intende per curvatura nei punti di incrocio? Dato che nel lavoro discuteremo esempi patologici di evoluzione, quello che a noi interessa è proprio potere dare un senso al movimento di superfici dopo eventuali strozzature, cambi di topologia, e in generale, formazioni di singolarità. Gli approcci suggeriti per dare un significato al movimento generalizzato delle superfici secondo la curvatura media sono stati finora essenzialmente tre: 1) l'approccio di Brakke [5] che fa uso della teoria dei varifold; 2) la tecnica di De Giorgi [10,12] che consiste nel vedere l'evoluzione come limite asintotico dell'equazione di Allen-Cahn tipo reazione-diffusione (si veda anche [3,6]); 3) il senso della viscosità.

In questa nota intepreteremo l'evoluzione in base al terzo approccio, che è stato sviluppato in dettaglio da Evans e Spruck [15,16,17], e, indipendentemente, da Chen, Giga, e Goto [7] (si veda anche Soner [29]). In [19] Giga, Goto, Ishii, e Sato hanno studiato una classe più generale di movimenti, che include il moto con termine forzante. L'idea di soluzione di viscosità per equazioni paraboliche si trova, inizialmente, in un lavoro di Crandall e P.-L. Lions [9], P.-L. Lions [25], e Jensen [24] (si veda [8] per una amplia bibliografia sull'argomento).

†Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 40127 Bologna, Italy. email: bellettini@dm.unibo.it

Ricordiamo brevemente come si affronta il movimento delle superfici secondo la curvatura media con la teoria della viscosità: l'idea [26,28] è quella di vedere la superficie iniziale come insieme di livello zero di una certa funzione (ad esempio la funzione distanza d dalla superficie); poi di risolvere (nel senso viscoso) l'equazione del movimento, che è della forma

$$u_t - |\nabla u| \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \qquad u_0(x) = d(x), \tag{1.1}$$

e infine definire l'evoluzione della superficie al tempo t come la linea di livello zero della soluzione u di (1.1) al tempo t.

Lo scopo di questa nota è illustrare due esempi di una funzione lipschitziana $u_0 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ le cui linee di livello evolvono nel tempo nel senso della viscosità secondo la legge

$$V(x,t) = \kappa(x,t) + g(t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

dove V indica la velocità normale e κ la curvatura, con la proprietà che esiste una linea di livello iniziale $\{u_0 = \lambda^\star\}$ tale che

$$\begin{aligned} &u_0 \text{ è di classe } C^\infty \text{ in un intorno di } \{u_0 = \lambda^\star\}, \\ &\{u_0 = \lambda^\star\} \text{ è compatta e } |\nabla_x u_0| > 0 \text{ su } \{u_0 = \lambda^\star\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

che degenera, dopo un certo tempo, in un insieme con parte interna. La funzione g si dice termine forzante. Nei nostri esempi considereremo $g(t) = 1 - t$ e $g(t) \equiv 1$, rispettivamente.

Un tale comportamento è stato chiamato "fattening", che abbiamo tradotto in italiano "rigonfiamento". Bisogna subito dire che il rigonfiamento non si presenta (in dimensione due) se $g = 0$ quando si parta da curve di livello regolari nel senso di (1.3) [15,20]. Si presenta invece, ancora con $g = 0$, se si parte da una curva compatta con incroci [15], o da una curva senza incroci ma non compatta [22]. Il problema della formazione di rigonfiamento in dimensione maggiore di due senza termine forzante è molto più complicato: è stato mostrato che il toro in $\mathbf{R}^3$ [31] non sviluppa parte interna. De Giorgi [13] ha congetturato che la superficie regolare non compatta $\sin x_1 + \sin x_2 + \sin(\alpha x_3)$ possa formare interno, per un opportuno valore di α. Ho in questi giorni appreso che Angenent, Chopp, Ilmanen, e Velasquez hanno annunciato esempi in questa direzione.

Come ultimo commento, il fenomeno del rigonfiamento ci sembra molto legato all'idea della viscosità: infatti, il vedere la superficie in evoluzione come linea di livello di una certa funzione implica che tale linea di livello risenta in qualche modo del comportamento delle linee di livello vicine, da sopra e da sotto. Questa affermazione si chiarisce una volta visti nei dettagli gli esempi proposti.

2. Qualche notazione. Come convenzioni, sceglieremo curvatura negativa per insiemi convessi, e velocita positiva per curve che si espandono. Indichiamo con $B_\varrho(x)$ la palla aperta centrata in x e di raggio ϱ.

Abbiamo detto nell'introduzione che studieremo casi di evoluzione con termine forzante g; l'equazione che governa questo tipo di moto si scrive come

$$u_t - |\nabla u|\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + |\nabla u|g(t) = 0. \tag{2.1}$$

Casi particolari di teoremi mostrati in [19] danno risultati di confronto per (2.1) e un teorema di esistenza e unicità nel senso viscoso, purchè il dato iniziale sia continuo e abbia valore costante fuori da una palla.

Preso allora un dato iniziale u_0 e un termine forzante g opportuni, seguendo le notazioni di [11], per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ e ogni $t \in [0,T]$ definiremo

$$\mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda\}, g)(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : u(x,t) = \lambda\},$$
$$\mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : u(x,t) < \lambda\},$$

dove indichiamo con u la soluzione viscosa di (2.1) con dato iniziale $u(x,0) = u_0(x)$. L'insieme $\mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda\}, g)(t)$ è dunque l'evoluzione generalizzata di $\{u_0 = \lambda\}$ secondo l'equazione (2.1).

3. Gli esempi.

Esempio 1: $g(t) = 1 - t$.

Nel primo esempio g è positiva, dunque tende a fare espandere le curve, e decrescente in t, dunque sempre meno espansiva con il passare del tempo.

Teorema 3.1. *Sia $g(t) = 1 - t$ per $t \in [0,1[$. Allora esistono una funzione $u_0 \in Lip(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, un numero reale $\lambda^\star$, una palla B centrata nell'origine e un intervallo di tempi $[\alpha,\beta] \subseteq]0,1[$ tali che $\{u_0 = \lambda^\star\}$ verifica (1.3) e*

$$B \subseteq MCM(\{u_0 = \lambda^\star\}, g)(t) \qquad \forall t \in [\alpha,\beta].$$

Precisamente, u_0 è della forma

$$u_0(x) = \min(dist(x,E) - dist(x, \mathbf{R}^2 \setminus E) + R^\star, 2R^\star), \tag{3.1}$$

con

$$E = B_{R^\star}(-R^\star, 0) \cup B_{R^\star}(R^\star, 0), \tag{3.2}$$

dove $R^\star$ è un opportuno numero reale positivo, con $R^\star > \lambda^\star$.

DIMOSTRAZIONE. Il problema è naturalmente trovare una funzione u_0 che verifichi l'asserto. Costruiremo tale funzione partendo dalla costruzione delle sue linee di livello. Visto che il grafico della funzione sarà composto di due coni eguali uno accanto all'altro, aventi dunque parecchie linee di livello che sono unione di due cerchi, cominciamo con l'analizzare come si muove un cerchio in accordo alla (1.2).

Prendiamo un qualsiasi numero $\lambda \in]3,5[$. Si consideri in $\mathbf{R}^2$ un cerchio di raggio $R_\lambda(t)$ che evolva nel tempo secondo la (1.2), con $R_\lambda(0) = \lambda$. Si ha dunque

$$\begin{cases} \dot{R}_\lambda(t) = -\dfrac{1}{R_\lambda(t)} + g(t) & \forall t \in]0,1[, \\ R_\lambda(0) = \lambda. \end{cases}$$

Si possono mostrare le seguenti affermazioni: per ogni $\lambda \in]3,5[$ si ha $1 < \lambda - 2 < R_\lambda(t) < \lambda + 2$ per ogni $t \in [0,1[$; R_λ è strettamente concava su $[0,1[$, ed esiste un unico $t_\lambda \in]0,1[$ tale che $\dot{R}_\lambda(t_\lambda) = 0$. Inoltre se $\lambda_1, \lambda_2 \in]3,5[$; allora

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow R_{\lambda_1}(t) < R_{\lambda_2}(t) \qquad \forall t \in [0,1[. \tag{3.3}$$

Poniamo $\lambda^\star = 4$, $t_{\lambda^\star} = t^\star$, e $R^\star = R_{\lambda^\star}(t^\star) > R_{\lambda^\star}(0) = \lambda^\star$. Sia E definito come in (3.2), e prendiamo u_0 come in (3.1). L'insieme E è unione di due cerchi uguali di $\mathbf{R}^2$ tangenti nell'origine, e il grafico di u_0 è dunque composto di due semiconi rovesciati aventi come linea di livello $R^\star$ i due cerchi dati da E; la troncatura con $2R^\star$ serve per avere un dato iniziale costante fuori da una certa palla, in modo da applicare i risultati richiamati nella Sezione 2. Dunque $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$. La linea di livello che creerà rigonfiamento sarà $\{u_0 = \lambda^\star\}$; poichè $\lambda^\star < R^\star$, si ha che $\{u_0 = \lambda^\star\}$ verifica (1.3), e anzi è data da due cerchi simmetrici rispetto all'asse x_2 e disgiunti.

L'idea euristica su cui si basa l'esempio è la seguente: la linea di livello $\{u = \lambda^\star\}$ è formata al tempo $t = 0$ da due cerchi disgiunti che, viste le scelte fatte, all'istante $t^\star$ si toccano nell'origine. Le linee di livello $\{u = \lambda\}$, per $\lambda < \lambda^\star$, saranno dunque, per confronto, formate da due cerchi che durante tutta l'evoluzione rimangono disgiunti, e anzi, per un certo tempo dopo $t^\star$, rimangono ben disgiunti indipendentemente dalla scelta di λ comunque vicino a $\lambda^\star$. D'altra parte, le linee di livello $\{u = \lambda\}$, per λ appena più grande di $\lambda^\star$, sono unione di due cerchi inizialmente disgiunti, i cui interni, ancora per confronto, debbono intersecarsi, dando origine a un insieme a forma "di fagiolo". La parte più difficile è allora mostrare che l'insieme a forma di "fagiolo", il cui bordo è la linea di livello λ, ha una parte centrale che, durante l'evoluzione successiva a $t^\star$, non si restringe troppo, e anzi, contiene una palla centrata nell'origine, per tutti i valori di λ comunque vicini a $\lambda^\star$. Una volta mostrate queste proprietà, si può immaginare che per la linea di livello $\lambda^\star$ si abbia allora formazione di parte interna, poichè tale linea eredita alcune delle proprietà delle linee di livello sopra e sotto $\lambda^\star$ (si vedano le (3.6) e (3.7)). In questo senso,

come accennato alla fine dell'introduzione, la formazione di rigonfiamento sembra legata alla nozione di evoluzione nel senso della viscosità. Si vedano le Figure (3.1) e (3.2).

Per ogni $t \in [0,1[$ ed ogni $\lambda \in]3,5[$ definiamo

$$\Sigma_\lambda^\pm(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x - (\pm R^*, 0)| = R_\lambda(t)\},$$
$$I_\lambda^\pm(t) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x - (\pm R^*, 0)| < R_\lambda(t)\}.$$

Grazie a risultati di confronto, non è difficile mostrare che $\Sigma_\lambda^-(t) \cap \Sigma_\lambda^+(t) = \emptyset$ per ogni $\lambda \in]3, \lambda^*[$ e ogni $t \in [0,1[$.
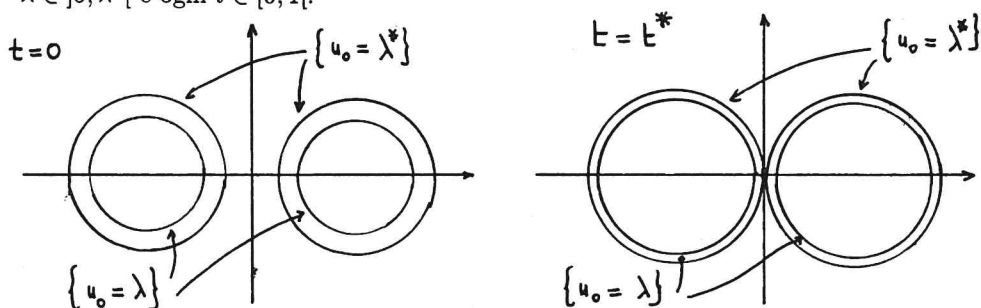
Figura 3.1. Evoluzione delle linee di livello per $\lambda < \lambda^*$.
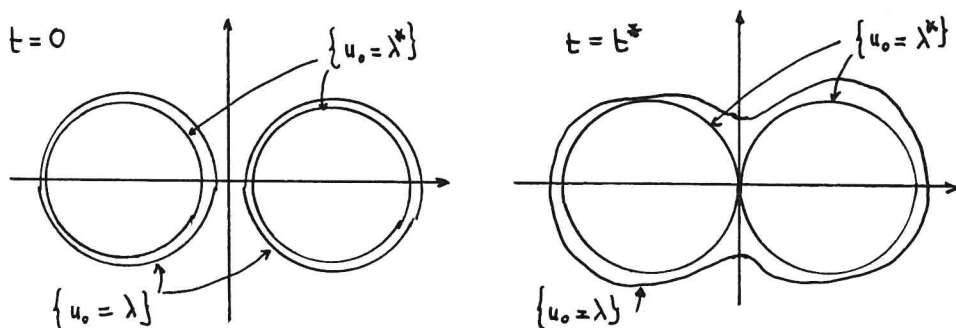
Figura 3.2. Evoluzione delle linee di livello per $\lambda > \lambda^*$.

Dimostriamo adesso in dettaglio che esistono un intervallo di tempo $[\alpha, \beta] \subset]t^*, 1[$ e una palla B centrata nell'origine, indipendenti da $\lambda \in]\lambda^*, 5[$, tali che

$$B \subset \mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t) \qquad \forall \lambda \in]\lambda^*, 5[\quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.4}$$

Sia $\lambda \in]\lambda^*, 5[$ e sia $\lambda^* < \mu < \lambda$. Poichè $I_\mu^-(0) \subseteq \{u_0 < \mu\}$ e entrambi gli insiemi evolvono secondo la stessa legge geometrica, un risultato di confronto garantisce che $I_\mu^-(t) \subseteq \mathrm{MCM}(\{u_0 < \mu\}, g)(t)$ per ogni $t \in [0,1[$. Lo stesso ragionamento si può applicare a $I_\mu^+(t)$, e dunque $I_\mu^-(t) \cup I_\mu^+(t) \subseteq \mathrm{MCM}(\{u_0 < \mu\}, g)(t)$ per ogni $t \in [0,1[$.

Essendo $\lambda^\star < \mu$, dalla (3.3) abbiamo $R^\star < R_\mu(t^\star)$. Pertanto $I_\mu^-(t^\star) \cup I_\mu^+(t^\star)$ è unione di due palle aperte entrambe contenenti l'origine. Consideriamo adesso un aperto connesso regolare a forma di osso di cane $D(t^\star)$ (si veda la Figura (3.3)), con $I_{\lambda^\star}^-(t^\star) \cup I_{\lambda^\star}^+(t^\star) \subset\subset D(t^\star) \subset\subset I_\mu^-(t^\star) \cup I_\mu^+(t^\star) \subseteq \mathrm{MCM}(\{u_0 < \mu\}, g)(t^\star)$, e che sia simmetrico rispetto ai due assi coordinati. Si denoti con $D(t)$ l'evoluzione di $D(t^\star)$ per sola curvatura (senza termine forzante) per ogni $t \in [t^\star, 1[$. Si indichi con $C^\pm(t)$ l'evoluzione per sola curvatura (senza termine forzante) di $\Sigma_{\lambda^\star}^\pm(t^\star)$ per ogni $t \in [t^\star, 1[$. Sia inoltre $C(t)$ l'evoluzione per sola curvatura del cerchio $\partial B_{R^\star}(0, R^\star)$ per ogni $t \in [t^\star, 1[$. Sia $t^\star < \beta < 1$ tale che $C(\beta) \cap C^+(\beta) \neq \emptyset$, e poniamo $\alpha = (t^\star + \beta)/2$. Infine si scelga una palla B centrata nell'origine che non interseca $C^\pm(t) \cup C(t)$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$. Sottolineiamo che α, β, e B non dipendono dalla scelta di $\lambda \in]\lambda^\star, 5[$.
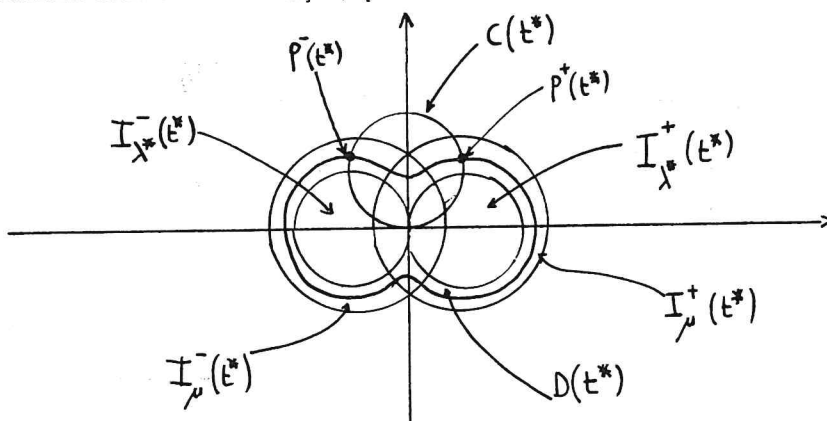
Figura 3.3. L'insieme $D(t^\star)$.

Si può assumere che $C(t^\star) \cap \partial D(t^\star)$ consista di due punti, $p^\pm(t^\star)$. Sia $\{p^-(t), p^+(t)\} = C(t) \cap \partial D(t)$ l'evoluzione continua di $p^-(t^\star)$ e $p^+(t^\star)$; questi due punti esistono e sono distinti per qualche tempo dopo $t^\star$. Ma soprattutto esistono per tutti i tempi $t \in [t^\star, \beta]$. Infatti, grazie a un risultato di Angenent [2, Th. 3.2] questi due punti scompaiono solo quando vengono a coincidere, e questo non può verificarsi prima di $t = \beta$, dato che essi sono forzati a stare fuori di $C^\pm(t)$. Se ne deduce che la parte di $\partial D(t)$ tra $p^-(t)$ e $p^+(t)$ deve giacere dentro $C(t)$ per ogni $t \in [t^\star, \beta]$. Dunque essendo $B \cap (C^\pm(t) \cup C(t)) = \emptyset$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, abbiamo

$$B \subset D(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.5}$$

Poichè $g(t) > 0$ per ogni $t \in [t^\star, \beta]$, la soluzione di (2.1) è una sottosoluzione del moto per curvatura media senza termine forzante. Ne segue, per un teorema di confronto [7,15], che $D(t) \subset \mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t)$ per ogni $t \in [t^\star, \beta]$. Dalla (3.5) segue allora la (3.4).

Veniamo alla conclusione della dimostrazione. Siano α, β, B come sopra. Allora dalla (3.4) abbiamo

$$\begin{aligned} &\mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda^*\}, g)(t) \cup \mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda^*\}, g)(t) \\ &= \bigcap_{\lambda \in]\lambda^*, 5[} \mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t) \supseteq B \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Inoltre, eventualmente prendendo B più piccola, ricordando che $\alpha > t^*$, si ha

$$\begin{aligned} &B \cap \mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda^*\}, g)(t) \\ &= B \cap \left(\bigcup_{\lambda \in]3, \lambda^*[} \mathrm{MCM}(\{u_0 < \lambda\}, g)(t) \right) = \emptyset \qquad \forall t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dalle (3.6) e (3.7) ne segue che

$$B \subseteq \mathrm{MCM}(\{u_0 = \lambda^*\}, g)(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

e questo conclude la prova del teorema 3.1. □

Nella Figura (3.4) è disegnata la presunta forma della linea di livello $\{u = \lambda^*\}$ quando si è già formato il fenomeno del rigonfiamento. Tale forma dovrebbe avere due buchi, e la sua frontiera essere formata da due componenti connesse. Ognuna di queste frontiere dovrebbe evolvere separatamente, seguendo la legge (1.2).
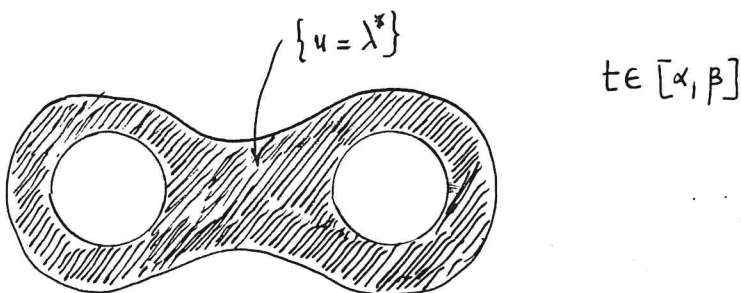
Figura 3.4. La forma presunta della linea di livello λ^* rigonfiata.

ESEMPIO 2: $g \equiv 1$.

Supponiamo adesso che g sia una costante positiva. Per semplicità, supporremo che $g \equiv 1$.

TEOREMA 3.2. *Sia $g \equiv 1$. Allora esistono una funzione $u_0 \in Lip(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, una palla B centrata nell'origine, e un intervallo di tempi $[\alpha, \beta] \subseteq [0, T]$ tali che $\{u_0 = 0\}$ verifica (1.3) e*

$$B \subseteq MCM(\{u_0 = 0\}, g)(t) \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Precisamente, u_0 è della forma

$$u_0(x) = \min(dist(x, F) - dist(x, \mathbf{R}^2 \setminus F), 1), \tag{3.8}$$

con

$$F = B_{R_{\overline{\mu}}(0)}(-R^\star, 0) \cup B_{R_{\overline{\lambda}}(0)}(r^\star, 0),$$

dove $R_{\overline{\mu}}(0)$, $R_{\overline{\lambda}}(0)$, $R^\star$, $r^\star$ sono opportuni numeri positivi, con $R_{\overline{\mu}}(0) + R_{\overline{\lambda}}(0) > R^\star + r^\star$, e $r^\star < R^\star$.

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso costruiremo la funzione u_0 partendo dalla costruzione delle sue linee di livello. Visto che il grafico della funzione sarà composto di due coni (diversi) uno accanto all'altro, analizziamo come si muove un cerchio in accordo alla (1.2).

Prendiamo un qualsiasi numero $\lambda > 0$. Consideriamo in $\mathbf{R}^2$ un cerchio di raggio $R_\lambda(t)$ che evolve secondo la (1.2), con $R_\lambda(0) = \lambda$. Allora

$$\begin{cases} \dot{R}_\lambda(t) = -\dfrac{1}{R_\lambda(t)} + 1 & \forall t \in \left]0, t^\lambda\right], \\ R_\lambda(0) = \lambda, \end{cases}$$

dove t^λ denota il tempo di estinzione. Si possono dimostrare le cose seguenti: se $0 < \lambda < 1$ allora $t^\lambda \in]0, +\infty[$, e R_λ è una funzione non negativa, concava, strettamente decrescente su $[0, t^\lambda]$ e tale che $R_\lambda(t^\lambda) = 0$. Se $\lambda = 1$ allora $R_\lambda \equiv 1$, e se $\lambda > 1$ allora R_λ è una funzione positiva, convessa, strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e tale che $\lim_{t \to +\infty} \dot{R}_\lambda(t) = 1$. Questo significa che un cerchio di raggio minore di 1, avendo curvatura alta, tende a restringersi a un punto nonostante l'effetto espansivo del termine forzante; invece, se il raggio è maggiore di 1 il cerchio si espande indefinitamente, tendendo ad avere una veolocità in modulo costante e uguale a 1. Cerchi di raggio 1 infine non si muovono. Notiamo che, proprio per queste proprietà, non sembra possibile cercare un esempio esattamente uguale all'esempio 1, cioè cercare un dato iniziale u_0 formato da due coni uguali. È però possibile costruire l'esempio con due coni di grandezza diversa. Vediamo come. Vogliamo scegliere due cerchi, uno di raggio maggiore di 1 e l'altro di raggio minore di 1, inizialmente disgiunti, e che, durante l'evoluzione, vengano a toccarsi in un punto (che poi fisseremo essere l'origine) e subito dopo si separino. Questo intuitivamente si può fare, pur di scegliere il cerchio grande di raggio sufficientemente grande (dunque che si muoverà con velocità pressochè costante); d'altra parte, il cerchio piccolo, una volta raggiunto dal grande, avendo una curvatura alta,

viene scelto in modo da staccarsi immediatamente dopo il contatto. In formule, fissiamo $0 < \overline{\lambda} < 1$ sufficientemente vicino a 1, in modo che $\dot{R}_{\overline{\lambda}}(0) = -1/2$, $\dot{R}_{\overline{\lambda}}(\tau) < -1$, per un opportuno $\tau \in]0, T[$, dove $T = t^{\overline{\lambda}}$. Abbiamo $\ddot{R}_{\overline{\lambda}} \leq -\sigma$ su $[0, \tau]$ per un certo $\sigma > 0$. Scegliamo $\overline{\mu} > 1$ abbastanza grande in modo che $\dot{R}_{\overline{\mu}}(0) \geq 3/4$, e $\ddot{R}_{\overline{\mu}} < \sigma$ su $[0, \tau]$. Posto $f = R_{\overline{\lambda}} + R_{\overline{\mu}}$, abbiamo $\dot{f}(0) > 0$, $\dot{f}(\tau) < 0$, e $\ddot{f} < 0$ su $[0, \tau]$. Dunque f ha un unico massimo locale stretto $t^\star \in]0, \tau[$ in $[0, \tau]$.

Poniamo $R^\star = R_{\overline{\mu}}(t^\star)$, $r^\star = R_{\overline{\lambda}}(t^\star)$, e

$$F = B_{R_{\overline{\mu}}(0)}(-R^\star, 0) \cup B_{R_{\overline{\lambda}}(0)}(r^\star, 0).$$

Osserviamo che F è unione di due palle disgiunte. Infine, definiamo u_0 come in (3.8). Cone queste scelte, semplici modifiche della dimostrazione dell'esempio 1 danno la tesi del teorema. □

4. Commenti finali. Abbiamo mostrato due esempi di rigonfiamento a partire da configurazioni elementari, cioè essenzialmente a partire da unioni di cerchi. Naturalmente si potrebbero cercare esempi a partire da unioni di curve convesse. Per fare questo, risultano necessari alcuni risultati sul moto delle curve convesse con termine forzante, che a nostra conoscenza non sono in letteratura. Il primo è che una curva convessa di classe C^∞ che evolva per curvatura con un termine forzante g (non necessariamente costante o positivo) rimane convessa. Il secondo risultato è che l'unico tipo si singolarità per le curve convesse sia il ridursi a un punto. Dimostriamo il primo risultato (per casi molto generali si veda [19]).

Ricordiamo che, se scegliamo coordinate cartesiane in modo che la curva sia localmente grafico cartesiano di una funzione f, allora l'evoluzione di f diventa

$$f_t = f_{x_1x_1} - \frac{f_{x_1}^2 f_{x_1x_1}}{1 + f_{x_1}^2} - g\sqrt{1 + f_{x_1}^2}. \tag{4.1}$$

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, e supponiamo che ad un certo istante t_0 si abbia $f_{x_1x_1}(x_1, t_0) \leq 0$ per ogni x_1. Assumiamo che esista $\overline{x}_1$ tale che $f_{x_1x_1}(\overline{x}_1, t_0) = 0$. Allora $f_{tx_1x_1}(\overline{x}_1, t_0) \leq 0$.*

PROOF. A meno di traslazioni e rotazioni, possiamo supporre che $(\overline{x}_1, t_0) = (0, 0)$, e $f(0,0) = f_{x_1}(0,0) = 0$. Dalle ipotesi segue che $x_1 = 0$ è un massimo locale per $f(\cdot, 0)$, e quindi

$$f_{x_1x_1x_1}(0,0) = 0, \qquad f_{x_1x_1x_1x_1}(0,0) \leq 0. \tag{4.2}$$

Derivando due volte l'equazione (4.1) rispetto a x_1 e usando (4.2), si deduce

$$f_{tx_1x_1}(0,0) = f_{x_1x_1x_1x_1}(0,0) \leq 0. \quad □$$

La dimostrazione che non si formano singolarità, tipo angoli, cuspidi, o segmenti, a partire da una curva strettamente convessa che evolva in accordo alla (1.2) e di classe C^∞ è un problema naturalmente più complicato. Nei ragionamenti di Gage e Hamilton [18] e Grayson [20], quando $g = 0$, si mostra che il minimo della curvatura di una curva strettamente convessa in evoluzione è non decrescente nel tempo. Se $g \neq 0$ questo potrebbe non essere vero. Tuttavia sembra plausibile che tale minimo, anche se decresce, si mantenga comunque uniformemente positivo per tempi finiti. Un enunciato possibile potrebbe essere il seguente.

Sia $C(t)$ una curva strettamente convessa e di classe C^∞ che si evolve secondo la legge (1.2), con g funzione uniformemente positiva. Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo limitato di tempi. Poniamo $h(t) = \min\{\kappa(x,t) : x \in \text{supporto}(C(t))\}$. Allora esiste una costante $C > 0$ (dipendente da I) tale che $h(t) \geq C$ per ogni $t \in I$.

REFERENCES

[1] F. Almgren, J.E. Taylor, and L. Wang, *Curvature-driven flows: a variational approach*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 387–437.

[2] S. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Differential Geom., 33 3 (1991), pp. 601–633.

[3] G. Barles, H.-M. Soner, and P.E. Souganidis, *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 439–469.

[4] G. Bellettini and M. Paolini, *Two examples of fattening for the mean curvature flow with a forcing term*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. e Natur. (1994) (to appear).

[5] K.A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[6] L. Bronsard and R.V. Kohn, *Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics*, J. Differential Equations, 90 (1991), pp. 211–237.

[7] Y.G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equation*, J. Differential Geom., 33 (1991), pp. 749–786.

[8] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27 (1992), pp. 1–67.

[9] M.G. Crandall and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 227 (1983), pp. 1–42.

[10] E. De Giorgi, *Some conjectures on flow by mean curvature*, in Methods of real analysis and partial differential equations, M.L. Benevento, T. Bruno, and C. Sbordone, Eds., Liguori, Napoli, 1990.

[11] E. De Giorgi, *Conjectures on limits of some quasilinear parabolic equations and flow by mean curvature*, Lecture delivered at the meeting on "Partial Differential Equations an related topics" in honour of L. Niremberg, Trento, September 3–7 (1990).

[12] E. De Giorgi, *Congetture sui limiti delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche quasi lineari*, in Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi, S.N.S. Quaderni, Pisa, 1991, pp. 173–187.

[13] E. De Giorgi, *Congetture riguardanti barriere, superfici minime, moto secondo la curvatura media*, Lecce.

[14] L.C. Evans, H.M. Soner, and P.E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math., 45 (1992), pp. 1097–1123.

[15] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geom., 33 (1991), pp. 635–681.

[16] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. Amer. Math. Soc., 330 (1992), pp. 321–332.

[17] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature III*. J. Geom. An., 2 (1992), pp. 121–150.

[18] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom., 23 (1986), pp. 69–96.

[19] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), pp. 443–470.

[20] M. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., 26 (1987), pp. 285–314.

[21] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., 31 (1990), pp. 285–299.

[22] T. Ilmanen, *Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold*, Indiana Univ. Math. J., 41 (1992), pp. 671–705.

[23] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., 38 (1993), pp. 417–461.

[24] R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of second-order fully nonlinear partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 101 (1988), pp. 1–27.

[25] P.-L. Lions, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, I*, Comm. Partial Differential Equations, 8 (1983), pp. 1101-1134.

[26] S. Osher and J.A. Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations,*, J. Comput. Phys., 79 (1988), pp. 12–49.

[27] M. Paolini and C. Verdi, *Asymptotic and numerical analyses of the mean curvature flow with a space-dependent relaxation parameter*, Asymptotic Anal., 5 (1992), pp. 553–574.

[28] J. A. Sethian, *Recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature-dependent speed: Hamilton-Jacobi equations, conservation laws*, J. Diff. Geom., 31 (1990), pp. 131–162.

[29] H.-M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Differential Equations, 101 (1993), pp. 313–372.

[30] H.M. Soner, *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I: convergence*, Research report n. 93-NA-026, August (1993), Carnegie Mellon University.

[31] H.M. Soner and P.E. Souganidis, *Singularities and uniqueness of cylindrically symmetric surfaces moving by mean curvature*, Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993), pp. 859–894.